Die Integrality Ratio der Subtour-Relaxierung

Andreas Alexander Haupt

Geboren am 2. November 1993 in Frankfurt am Main

07. Juli 2014

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuer: Professor Dr. Stefan Hougardy

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Contents

Einleitung **i**

1. Effiziente Algorithmen für geometrische Spezialfälle **1**
1.1. Convex-Hull-and-Line-TSP 1
1.1.1. Reduktion auf ein azyklisches Kürzeste-Wege-Problem 4
1.1.2. Dynamische Programmierung für lineare Laufzeit 7
1.1.3. Spezialisierung für das 3-Lines-TSP 8
1.2. Convex-Hull-and-Y-TSP 9

2. Eine Instanz mit großer Integrality Ratio **15**

A. Anhänge **21**
A.1. Instanzen mit trivialer Integrality Ratio 21
A.1.1. Hinreichende Bedingungen 21
A.1.2. Notwendige Bedingung 22
A.2. Ganzzahligkeit des TSP-Polytops für Instanzen bis fünf Knoten 23

Einleitung

Das *Travelling-Salesman-Problem* (TSP) ist eines der am meisten untersuchten Probleme der kombinatorischen Optimierung. Viele Spezialfälle des TSP sind, falls $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$, nicht beliebig gut effizient approximierbar. Daher werden für diese Probleme auch Approximationsalgorithmen konstanter Approximationsgüte betrachtet. Ein solcher besteht in der Lösung des Subtour Linear Program, einer Relaxierung des TSP. So erhaltene Näherungen haben sich in Anwendungen (TSPLIB, **TSPLIB˙Seite**) als sehr gut erwiesen. Da weiterhin die Ellipsoidmethode polynomielle Laufzeit garantiert, besteht berechtigtes Interesse daran, die genaue Approximationsgüte dieses Algorithmus zu erfahren. Diese Arbeit untersucht das euklidische TSP, einen Spezialfall, zum Einen im Bereich schneller exakter Algorithmen (etwa **BakiKabadi˙Generalization**; **DeinekovanDalRote˙line**; **DeinekoWoeginger˙kline**; **GarciaJodraTejel˙EfficientMonge**; **GarciaTejel˙TwoConvexPolygon**; **Rote˙n-line**; **Rote˙TwoSolvable**), zum Anderen, um die Approximationsgüte nach unten zu beschränken (**Hougardy˙IntRatioSEP** nachfolgend).

Grundlegende Begriffe

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem *metrischen Travelling-Salesman-Problem*:

metrisches Travelling-Salesman-Problem	
Instanz:	(K_n, c), wobei $n \geq 3$ und $c\colon E(K_n) \to \mathbb{R}_+$ die Dreiecksungleichung erfüllt
Aufgabe:	Finde einen Hamiltonkreis minimalen Gewichts.

Ein Hamiltonkreis in einer Instanz des TSP wird im Folgenden eine *Tour* genannt. In chapter 1 wird dieser Begriff auch für einen geschlossenen Spaziergang, der alle Knoten besucht, benutzt. Wenn im Folgenden von Graphen die Rede ist, sind diese immer ungerichtet und einfach.

Die in dieser Arbeit betrachtete Formulierung des Travelling-Salesman-Problems als

ganzzahlig-lineares Programm (für $V(K_n) = \{1, \ldots, n\}$) ist:

$$\min \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij} x_{ij}, \text{ so dass}$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\colon \sum_{i \neq j} x_{ij} = 2 \tag{2FG}$$

$$\forall \emptyset \subsetneq S \subsetneq \{1, \ldots, n\}\colon \sum_{i \neq j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \tag{SU}$$

$$\forall i \neq j \in \{1, \ldots, n\}\colon x_{ij} = x_{ji} \tag{SYM}$$

$$\forall i \neq j \in \{1, \ldots, n\}\colon x_{ij} \in \{0, 1\}. \tag{VB}$$

Die konvexe Hülle der Punktmenge, über die optimiert wird, wird *Travelling-Salesman-Polytop* (TSPP(n)) genannt. Die Gleichungen (2FG) werden 2-*Faktor-Gleichungen* oder *Gradgleichungen* genannt, die Ungleichungen (SU) *Subtour-Eliminationsungleichungen*. (SU) kann äquivalent durch

$$\forall \emptyset \subsetneq S \subsetneq \{1, \ldots, n\}\colon \sum_{i \in S, j \notin S} x_{ij} \geq 2 \tag{SU$'$}$$

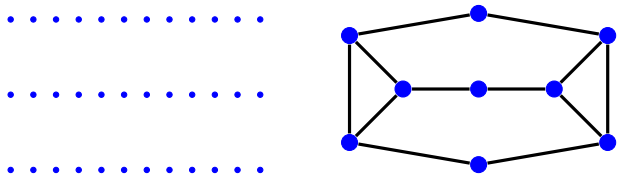
ersetzt werden (siehe z.B. **KorteVygen**). Relaxiert man (VB) zu $x_{ij} \in [0, 1]$, so wird das *Subtour-Eliminationspolytop* (SEP(n)) erhalten. Diese Relaxierung heißt *Subtour-Relaxierung*. Für einen optimalen Zielfunktionswert bezüglich einer Kostenfunktion c über einem Polytop P wird im Folgenden OPT_P^c geschrieben. Wenn die betrachtete Kostenfunktion aus dem Kontext klar ist, wird der besseren Übersicht halber der Superskript vernachlässigt. Der Wert x_{ij} wird auch als *x-Wert der Kante* $\{i, j\}$ und als $x(\{i, j\})$ bezeichnet.

Zwei interessante Spezialfälle des metrischen TSP sind das *euklidische* und das *1-2-TSP*. Im ersteren ist die Knotenmenge einer Instanz so in die euklidische Ebene einbettbar, dass der euklidische Abstand zweier Knoten u, v gemäß der Einbettung genau dem Kantengewicht $c(\{u, v\})$ entspricht. Eine solche Einbettung wird *isometrisch* genannt. Im 1-2-TSP hingegen sind die Kantengewichte auf die Menge $\{1, 2\}$ beschränkt.

Namensgebend für diese Arbeit und Hauptuntersuchungsgegenstand ist die bei der Subtour-Relaxierung entstehende multiplikative Ganz"-zahl"-igkeits"-lücke/"-*Integrality Ratio* $\sup_{c \in C}(\mathrm{OPT}^c_{\mathrm{TSPP}}/\mathrm{OPT}^c_{\mathrm{SEP}})$ für C die Menge der Kostenfunktionen des euklidischen TSP. Obere Schranken von Ξ für die Ganzzahligkeitslücke bestimmter Spezialfälle des TSPs liefern Ξ-Approximationsalgorithmen für den Wert einer optimalen Tour ebendieser Fälle.

Überblick über bisherige Erkenntnisse

1980 gelang Wolsey in **Wolsey˙HeuristicBranch** der Nachweis, dass der $3/2$-Approxim"-ationsalgorithmus für das metrische TSP von Christofides dieselbe Approximationsgüte auch für den optimalen Lösungswert des SEP liefert. Dies ist bis heute die einzige



(a) euklidisches TSP (b) 1-2-TSP

Figure 1.: Repräsentanten der Instanzenfamilien aus **Hougardy˙IntRatioSEP** und **Williamson˙HeldKarpHeuristic** In (b) sind genau die Kanten mit Gewicht 1 eingezeichnet.

obere Schranke für die Integrality Ratio des Subtour Linear Program im allgemeinen metrischen Fall. Obere Schranken über das Resultat von Wolsey hinaus konnten u.a. für das 1-2-TSP angegeben werden (**QianSchalekampWilliamson˙IntGap12**; **MnichMoemke˙Improved1** jedoch noch nicht für das euklidische.

Die größte bekannte Integrality Ratio für das metrische TSP ist jedoch $4/3$, was Hougardy sogar für den euklidischen Spezialfall nachwies (**Hougardy˙IntRatioSEP** siehe Abb. 1(a) für eine isometrische Einbettung eines Repräsentanten der Familie, die diese Schranke liefert). Für das 1-2-TSP hat Williamson in **Williamson˙HeldKarpHeuristic** eine Instanzenfamilie mit $9k, k \in \mathbb{N}$ Knoten, die eine Integrality Ratio von $10/9$ liefert, angegeben (siehe Abb. 1(b)). Von beiden unteren Schranken wird vermutet, dass sie scharf sind (siehe etwa **Williamson˙HeldKarpHeuristic** für eine frühe Erwähnung der Vermutung). Bis jeweils $n = 12$ wurden diese Vermutungen als wahr nachgewiesen (**BenoitBoyd˙ExactGap**; **BoydElliott-Magwood˙ExtremePoints** für das euklidische, **QianSchalekampWilliamson˙IntGap12** für das 1-2-TSP).

Für geometrische Spezialfälle des euklidischen TSP existieren effiziente Algorithmen: Jodra u.a. lieferten in **GarciaJodraTejel˙EfficientMonge** einen Algorithmus mit optimaler Laufzeit (linear in der Knotenanzahl) für eine spezielle Problemklasse, zu der auch Hougardys Instanzenfamilie aus **Hougardy˙IntRatioSEP** gehört. Dieser löst auch früher betrachtete Fälle (**DeinekovanDalRote˙line**; **Rote˙TwoSolvable**) in linearer Zeit. Für eine Klasse von Instanzen, die fast alle interessanten geometrischen Spezialfälle umfassen sollte, zeigten Rubinstein u.a. in **RubinsteinThomasWormald˙k-constrained** polynomielle optimale Lösbarkeit.

Eigene Ergebnisse

Es wird in chapter 2 eine weitere Familie von Instanzen des euklidischen TSP untersucht, die mindestens wie Hougardys Instanz aus **Hougardy˙IntRatioSEP** gegen $4/3$ konvergiert, dies jedoch vermutlich schneller tut. Für die Instanzenfamilie von Hougardy aus **Hougardy˙IntRatioSEP** wird der lineare Algorithmus von **GarciaJodraTejel˙EfficientMonge** in section 1.1 spezialisiert.

Des weiteren wird in section 1.2 ein neues Problem studiert, das Instanzen zulässt,

die eine geometrische Eigenschaft besitzen, die in der bisherigen Forschung vermieden wurde und für einen Spezialfall dessen ein Algorithmus präsentiert.

Im Anhang A.1 werden sowohl hinreichende als auch notwendige Bedingungen dafür gegeben, dass eine Instanz des 1-2-TSP an einer ganzzahligen Ecke des SEP optimiert wird.

1. Effiziente Algorithmen für geometrische Spezialfälle

In diesem Kapitel werden Algorithmen für zwei Klassen metrischer TSP-Instanzen angegeben. Beide haben ihren Ursprung im euklidischen TSP, sie gehen jedoch hierüber hinaus (siehe **BakiKabadi˙Generalization**). Die abstrakte Formulierung macht eine allgemeinere Anwendbarkeit möglich und umgeht das Problem, ob die Repräsentation einer euklidischen Instanz als Punktmenge (gegeben als Koordinaten) in der Ebene äquivalent zu der Repräsentation als TSP-Instanz ist.[1] Weiterhin ist bei einer solchen Formulierung besser aus einer Instanz erkennbar, ob sie die geforderten Eigenschaften erfüllt als bei einer Definition über eine Einbettung. Daher wird versucht, alle Definitionen dieses Kapitels einbettungsunabhängig zu fassen.

Als positives Resultat wurde in **RubinsteinThomasWormald˙k-constrained** erhalten, dass für euklidische Instanzen, bei denen die Knoten/*Punkte* isometrisch in eine endliche Menge injektiver, stetig differenzierbarer Kurven (deren Anzahl kein Teil des Inputs ist) eingebettet werden können, polynomiell in der Anzahl der Knoten gelöst werden kann. Daher ist das Hauptziel dieses Abschnitts, stärker eingeschränkte Klassen von Beispielen zu untersuchen, die schnell gelöst werden können: Das *Convex-Hull-and-Line-TSP* (*CHAL-TSP*, zuerst untersucht von **DeinekovanDalRote˙line**) – wobei der Name *Convex-Polygon-and-Line-TSP* zutreffender wäre – kann mit der hier präsentierten Reduktion in linearer Zeit gelöst werden. Danach wird eine neue Problemklasse betrachtet, das *Convex-Hull-and-Y-TSP* (*CHAY-TSP*). Da sich dies als hinreichend schweres Problem herausstellt, werden keine weiteren Verallgemeinerungen untersucht.

1.1. Convex-Hull-and-Line-TSP

In diesem Abschnitt werden Begriffe und Eigenschaften eines Spezialfalls des TSP vorgestellt. Dies wird im gesamten weiteren Text benötigt: In section 1.2 wird das Convex-Hull-and-Line-TSP verallgemeinert, in chapter 2 wird ein Beispiel dieser Klasse untersucht.

Unter einer Tour wird im Folgenden, wenn nicht anders erwähnt, ein geschlossener Spaziergang verstanden. Da im metrischen Fall Knotenwiederholungen in Touren immer ohne Erhöhung der Kosten der Tour abgekürzt werden können, ist die Suche eines optimalen solchen Spaziergangs äquivalent zur Lösung des metrischen TSP. Daher kann auch immer davon ausgegangen werden, dass ein echter Teilspaziergang einer Tour einen

[1] **RubinsteinThomasWormald˙k-constrained** haben hierzu bemerkt: Es ist unklar, ob das folgende Entscheidungsproblem in NP ist: Entscheide, gegeben zwei Listen von Punkten in der Ebene, welcher der Punkte jeweils einer der Listen durchlaufenden polygonalen Streckenzüge länger ist.

Weg *induziert* (für einen Spaziergang $v_1, e_1, \ldots, e_{k-1}, v_k$ ist also der induzierte Weg $(\{v_1, \ldots, v_k\}, \{e_1, \ldots, e_{k-1}\})$ tatsächlich ein Weg).

Die folgende Definition verallgemeinert bekannte Eigenschaften aus der Geometrie der Ebene: Wenn zwei Strecken sich schneiden, so können diese als die Diagonalen eines nichtentarteten Vierecks mit den Enden der Strecken als Eckpunkten angesehen werden. Für dieses ist dann – wie für jedes nicht"-entartete Viereck – die Summe der Diagonalen länger als die Summe gegenüberliegender Seiten. Die zweite Bedingung abstrahiert Punktmengen, die auf dem Rand ihrer konvexen Hülle liegen. Sind diese zyklisch nummeriert, schneiden sich offenbar alle Strecken zwischen wie im dritten Teil der Definition überkreuz liegenden Punkten.

1.1 Definition (BakiKabadi˙Generalization) *Für eine Instanz des TSP (K_n, c) auf der Knotenmenge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ definiere:*

(a) Zwei Kanten $\{v, w\}, \{x, y\} \in E(K_n)$ schneiden sich *genau dann, falls sie nichtadjazent sind und*

$$c(\{v, w\}) + c(\{x, y\}) > \max\{c(\{v, x\}) + c(\{w, y\}), c(\{v, y\}) + c(\{w, x\})\} \quad (1.1)$$

erfüllen. Die Wege A, B schneiden sich*, falls Kanten $a \in E(A), b \in E(B)$ existieren, die sich schneiden. Ein Weg/Kreis* schneidet sich selbst*, falls zwei Kanten aus diesem existieren, die sich schneiden.*

(b) Die Instanz heißt kreisoptimal*, falls für alle $1 \leq i < j < k < l \leq n$ gilt, dass $\{v_i, v_k\}$ und $\{v_j, v_l\}$ sich schneiden.*

(c) Seien $X \subseteq V$ und die Knoten in $X = (x_i)_{i=1}^{|X|}$ entsprechend ihrer Indizierung aufsteigend von 1 bis $|X|$ nummeriert. Wenn $(K_n[X], c|_X)$ mit dieser Nummerierung kreisoptimal ist, heißt $V \setminus X$ innerhalb von X*, falls für $1 \leq i < j < k < l \leq n$ mit $v_i, v_j, v_k, v_l \in X$ alle knotendisjunkten v_i-v_k- und v_j-v_l-Wege, deren mindestens einer einen Knoten aus $V \setminus X$ enthält, sich schneiden.*

Hieraus können direkt die beiden trivialen und in dieser Allgemeinheit vermutlich einzigen Optimalitätsbedingungen erhalten werden:

1.2 Proposition

- *(Folklore) Eine optimale Tour des TSP schneidet sich nicht selbst.*
- *(***BakiKabadi˙Generalization***) Für disjunkte Mengen $\emptyset \subsetneq A, B, C \subseteq V(G)$ und einen Weg W mit Knotenmenge C gilt: Wenn alle A-B-Wege in $V(G) \setminus C$ sich mit W schneiden, ist die Kantenmenge $E(W)$ kein Teil eines optimalen Hamiltonkreises.*

Die erste Aussage folgt daraus, dass das sich schneidende Kantenpaar durch eines der beiden leichteren Paare aus (1.1) ersetzt werden kann. Offenbar muss in einer der Möglichkeiten eine Tour entstehen. Die Annahme des Gegenteils der zweiten Aussage

liefert sofort, dass sich eine solche Tour selbst schneiden müsste, im Widerspruch zur ersten Aussage. Die Bedingungen der Kreisoptimalität und das Innerhalb-Liegen sind zentral für dieses Kapitel. Eine erste Konsequenz der Kreisoptimalität ist die Folgende: [**BakiKabadi˙Generalization**] In der Situation von Definition 1.1 (c) werden in einer optimalen Tour die Knoten (bis auf zyklische Vertauschung) aufsteigend oder absteigend besucht. Sei das Gegenteil und ohne Einschränkung $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$, $m < n$ angenommen. Dann gibt es eine Tour T, $1 \leq i+1 < j \leq m$, sowie einen von T durchlaufenen v_i-v_j-Weg W mit Knotenmenge C, der weder Knoten aus $A \coloneqq \{v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}\}$, noch aus $B \coloneqq \{v_{j+1}, \ldots, v_m, v_1, \ldots, v_{i-1}\}$ enthält. Per Definition 1.1 (c) ($V \setminus X$ innerhalb von X) schneidet jeder A-B-Weg, der keine Kante enthält, die A und B verbindet, den Weg W. Denn dann muss dieser einen Knoten aus $V \setminus X$ enthalten. Enthält dieser andererseits keine solche Kante, so schneidet dieser W wegen der Kreisoptimalität von X. Dies ist genau die Situation aus Proposition 1.2, womit man einen Widerspruch erhält. Mit diesen Begriffen kann die in diesem Abschnitt untersuchte Problemklasse definiert werden:

1.3 Definition (CHAL-TSP-Instanz) *Eine Instanz (K_n, c) des TSP heißt* Instanz des Convex-Hull-and-Line-TSP *(*CHAL-TSP-Instanz*) falls eine Partition $\mathcal{O} \dot\cup \mathcal{U} \dot\cup \mathcal{G} = V(K_n)$, $\mathcal{O} = (o_i)_{i=1}^{n_1}$, $\mathcal{U} = (u_i)_{i=1}^{n_2}$ und $\mathcal{G} = (g_i)_{i=1}^{n_3}$ existiert, so dass*

(a) $(o_1, \ldots, o_{n_1}, u_1, \ldots, u_{n_2})$, $(u_1, \ldots, u_{n_2}, g_1, \ldots, g_{n_3})$ und $(o_1, \ldots, o_{n_1}, g_{n_3}, \ldots, g_1)$ (in den durch die Tupel gegebenen Reihenfolgen nummeriert) kreisoptimal sind.

(b) $(g_1, \ldots, g_{n_3})$ innerhalb von $(o_1, \ldots, o_{n_1}, u_1, \ldots, u_{n_2})$ liegt.

Figure 1.1 ist ein Beispiel für einen geometrischen Spezialfall dieser Definition.

Damit lautet das CHAL-TSP:

Convex-Hull-and-Line-TSP (CHAL-TSP)	
Instanz:	(K_n, c) Instanz des TSP, $\mathcal{O} = (o_i)_{i=1}^{n_1}$, $\mathcal{U} = (u_i)_{i=1}^{n_2}$ und $\mathcal{G} = (g_i)_{i=1}^{n_3}$, so dass mit diesen Familien die Bedingungen aus Definition 1.3 erfüllt sind
Aufgabe:	Finde eine optimale TSP-Tour auf (K_n, c).

Obwohl starke Anforderungen an eine Instanz des CHAL-TSP gestellt werden, kann effizient entschieden werden, ob eine Instanz die Bedingungen dieses Spezialfalls des TSP erfüllt (**BakiKabadi˙Generalization** liefert einen $O(n^4)$-Algorithmus für dieses Entscheidungsproblem).

Ein geometrischer Spezialfall dieser Problemklasse ist (ggf. nach Umkehrung der Nummerierung der g_i): [nach **DeinekovanDalRote˙line**] ($\mathcal{O} = \{o_i | i = 1, \ldots, n_1\}$, $\mathcal{U} = \{u_i | i = 1, \ldots, n_2\}$, $\mathcal{G} = \{g_i | i = 1, \ldots, n_3\}$) ist ein CHAL-TSP nach Rote u.a., falls sie eingebettet werden kann, so dass gilt:

- $\mathcal{G} \subset \{(x, y) | y = 0\}$, $\mathcal{O} \subset \{(x, y) | y > 0\}$, $\mathcal{U} \subset \{(x, y) | y < 0\}$
- $\mathcal{O}$,$\mathcal{U} \subseteq \overline{\text{conv}(\mathcal{G} \cup \mathcal{O} \cup \mathcal{U})}$

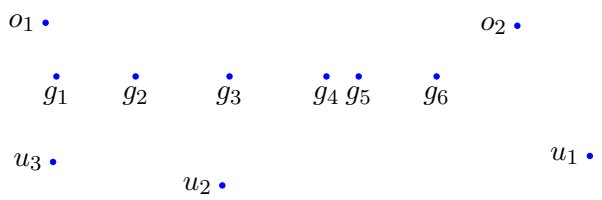


Figure 1.1.: Eine Einbettung einer Instanz des CHAL-TSP (sogar des Spezialfalls aus 5)

- $(o_i)_{i=1}^{n_1}$ und $(g_i)_{i=1}^{n_3}$ sind aufsteigend, $(u_i)_{i=1}^{n_2}$ absteigend in der x-Koordinate angeordnet.

Figure 1.1 ist ebenfalls von dieser Form. Eine noch restriktivere Einschränkung ist das *3-Lines-TSP*, bei dem nicht nur $\mathcal{G}$, sondern auch $\mathcal{O}$ und $\mathcal{U}$ Teilmengen von Geraden sind, die parallel zu der Trägergeraden von $\mathcal{G}$ sind. Zu diesem gehört auch die Beispielfamilie aus **Hougardy˙IntRatioSEP** (siehe Abbildung 1(a) auf Seite iii).

1.1.1. Reduktion auf ein azyklisches Kürzeste-Wege-Problem

Mit den vorangehend bewiesenen Aussagen folgt, dass optimale Touren des CHAL-TSP eine sehr spezifische Struktur haben (siehe auch **BakiKabadi˙Generalization**): [**Kabadi˙PolySolvable**] Sei (K_n, c), $(o_i)_{i=1}^{n_1}$, $(u_i)_{i=1}^{n_2}$, $(g_i)_{i=1}^{n_3}$ eine Instanz des CHAL-TSP. Dann gilt für eine optimale Tour T:

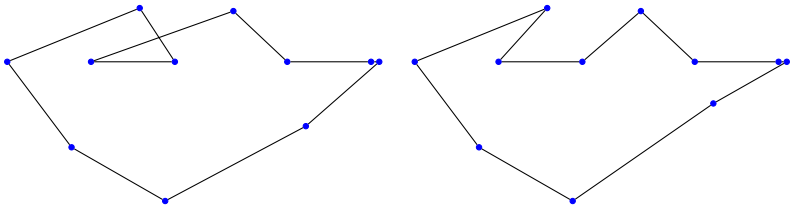
(a) Es gibt keine Kanten in T, deren Endknoten aus $\mathcal{G}$, aber in $(g_i)_{i=1}^{n}$ nicht aufeinanderfolgend sind.

(b) Für alle $g_k, g_l \in \mathcal{G}$ und $o_i, o_j \in \mathcal{O}$, $i < j$ bzw. $u_i, u_j \in \mathcal{U}$, $i > j$ gilt: Wenn $\{o_i, g_k\}$ und $\{o_j, g_l\}$ bzw. $\{u_i, g_k\}$ und $\{u_j, g_l\}$ Kanten in T sind, dann gilt $k < l$.

(a) Sei $\{g_i, g_j\}$, $i < j$ eine solche Kante. Definiere $C \coloneqq \{g_i, g_j\}$, $E(W) \coloneqq \{\{g_i, g_j\}\}$, $A \coloneqq \{g_k | k \in \{i+1, \ldots, j-1\}\}$, $B \coloneqq V(G) \setminus (A \cup B)$. Wegen der Kreisoptimalität von $(u_1, \ldots, u_{n_2}, g_1, \ldots, g_{n_3})$ und $(o_1, \ldots, o_{n_1}, g_{n_3}, \ldots, g_1)$ kann Proposition 1.2 angewandt werden. Damit wird abermals ein Widerspruch erhalten.

(b) Aus der Kreisoptimalität von $(u_1, \ldots, u_{n_2}, g_1, \ldots, g_{n_3})$ und $(o_1, \ldots, o_{n_1}, g_{n_3}, \ldots, g_1)$ folgt direkt, dass sich andernfalls die genannten Kanten schneiden müssten.

Es tauchen also in einer optimalen Tour zwischen zwei Knoten des Randes immer nur bzgl. ihrer Nummerierung aufeinanderfolgende Knoten aus $\mathcal{G}$ auf (Mengen solcher Knoten werden im Folgenden *Abschnitte* genannt). Daher gilt: [nach **DeinekovanDalRote˙line**] Ausgehend vom geschlossenen Spaziergang $\partial \coloneqq o_1, \ldots, o_{n_1}, \{o_{n_1}, u_1\}, u_1, \ldots, u_{n_2}$ $\{u_{n_2}, o_1\}$, o_1 kann eine optimale Tour durch die Partitionierung der Menge $\mathcal{G}$ in Abschnitte und dem Einfügen der Abschnitte zwischen jeweils zwei in ∂ aufeinanderfolgenden Knoten erhalten werden. Solche aufeinanderfolgenden Knoten werden im Weiteren



(a) keine richtige Orientierung (b) richtige Orientierung

Figure 1.2.: Eine Abbildung zu 1.1.1 (b)

aufeinanderfolgende Knoten des Randes genannt. Aus 1.1.1 (b) folgt für eine optimale Tour T: Außer zwischen o_{n_1} und u_1 sowie u_{n_2} und o_1 können Abschnitte genau in einer Reihenfolge eingefügt werden. Dieses Einfügen wird *in richtiger Orientierung* genannt (siehe Figure 1.2). Für die beiden anderen Fälle gilt:

1.4 Lemma (DeinekovanDalRote˙line; BakiKabadi˙Generalization) *Zwischen u_{n_2} und o_1 kann nur ein Abschnitt, der g_1 enthält, eingefügt werden; zwischen o_{n_1} und u_1 nur ein solcher, der g_{n_2} enthält.*

Es wird nur die erste Aussage gezeigt, die zweite kann bis auf Umbenennungen identisch bewiesen werden. Sei das Gegenteil angenommen und sei $g_p, \dots, g_{p+\ell}$ der Abschnitt, der zwischen u_{n_2} und o_1 eingefügt wird. Dann ist einer der Spaziergänge $S = o_1, \{o_1, g_p\}, \dots, g_{p+\ell}, \{g_{p+\ell}, u_{n_2}\}, u_{n_2}$ oder $o_1, \{o_1, g_{p+\ell}\}, \dots, g_p, \{g_p, u_{n_2}\}, u_{n_2}$ in einer optimalen Tour (ggf. durch Umkehrung der Orientierung) enthalten, etwa S. Definiere $A \coloneqq \{g_1, \dots, g_{p-1}\}$, $B \coloneqq N \setminus (A \cup C)$ und sei W der durch S induzierte Weg. Dann sind die Bedingungen von Proposition 1.2 wegen Kreisoptimalität von $(u_1, \dots, u_{n_2}, g_1, \dots, g_{n_3})$ und $(o_1, \dots, o_{n_1}, g_{n_3}, \dots, g_1)$ erfüllt und es wird ein Widerspruch erhalten. Für den anderen Spaziergang erhält man den Widerspruch analog. Die bisherigen Aussagen legen nahe, für jeden Abschnitt das Paar aufeinanderfolgender Knoten des Randes zu finden, das die geringsten Kosten bei der Einfügung erzeugt und danach geeignet die Menge $V(G)$ zu partitionieren. Dieses Problem kann auf ein Kürzeste-Wege-Problem in einem azyklischen Digraphen reduziert werden:

1.5 Definition (BakiKabadi˙Generalization) (g_i, g_j, x, y), $i, j \in \{1, \dots, n_3\}, x, y \in \mathcal{O} \cup \mathcal{U}$ *heißt* zuläs"-sig, *falls g_{i+1}, g_j, x, y die Bedingungen von Lemma 1.4 erfüllen und die Einfügung der Knoten in einem richtig eingefügten Abschnitt in der Reihenfolge x, g_{i+1}, g_j, y vorkommen. Sei g_0 ein Knoten, der nicht in $\mathcal{O} \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{G}$ enthalten ist und*

$c[g_{i+1}, g_j] \coloneqq \sum_{k=i+1}^{j-1} c(g_k, g_{k+1})$. *Dann definiere die Kosten der Einfügung als*

$$c(g_i, g_j, x, y) \coloneqq \begin{cases} c(x, g_{i+1}) + c[g_{i+1}, g_j] + c(g_j, y) - c(x, y) & x = o_t, y = o_{t+1} \\ & x = u_{t+1}, y = u_t \\ \min\{c(o_1, g_1) + c[g_1, g_j] + c(g_j, u_{n_2}) - c(g_1, u_{n_2}), & i = 0, x = o_1, \\ c(o_1, g_j) + c[g_1, g_j] + c(g_1, u_{n_2}) - c(o_1, u_{n_2}) & y = u_{n_2} \\ \min\{c(o_{n_1}, g_{i+1}) + c[g_{i+1}, g_{n_3}] + c(g_{n_3}, u_1) - c(o_{n_1}, u_1), & i = n_2, x = o_{n_1}, \\ c(o_{n_1}, g_{n_3}) + c[g_{i+1}, g_{n_3}] + c(g_{i+1}, u_1) - c(o_{n_1}, u_1)\} & y = u_1 \\ \infty & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar ist (g_i, g_j, x, y) *genau dann zulässig, wenn* $c(g_i, g_j, x, y)$ *endlich ist. Damit definiere*

$$C(g_i, g_j) \coloneqq \min\{c(g_i, g_j, x, y) | (g_i, g_j, x, y) \textit{ zulässig}\} \tag{1.2}$$

und den reduzierten Graphen *als*

$$\breve{G} \coloneqq (\{g_0, \ldots, g_{n_3}\}, \{(g_i, g_j) | 0 \leq i < j \leq n_3\})$$

mit Kostenfunktion C*. Dieser ist per Definition azyklisch. Definiere weiterhin das* Gewicht des Randes *als* $c_\partial \coloneqq \sum_{i=1}^{n_1-1}\{o_i, o_{i+1}\} + \sum_{i=1}^{n_2-1}\{u_i, u_{i+1}\} + c(o_{n_1}, u_1) + c(o_1, u_{n_2})$.

Für ein zulässiges Quadrupel entspricht $c(g_i, g_j, x, y)$ der Differenz der Länge einer Tour, in der $g_i, \ldots, g_i$ zwischen x und y richtig orientiert eingefügt ist und c_∂. Die Struktur des reduzierten Graphen für $G(n, d)$ aus **Hougardy˙IntRatioSEP** ist einfach: Da die Instanz $G(n, d)$ aus **Hougardy˙IntRatioSEP** bezüglich $\mathcal{G}$ symmetrisch ist, kann davon ausgegangen werden, dass alle Abschnitte zwischen Punkten aus $\mathcal{O}$ eingefügt werden. Des weiteren hängt für $i \neq 0, j \neq n_3$ $C(g_i, g_j)$ nur von $j - i$ ab.

Für Abschnitte, die g_1 oder g_{n_3} enthalten, gibt es nach Lemma 1.4 nur zwei Mög"-lich"-keit"-en, die ebenfalls symmetrisch sind (dieselben Kosten für Abschnitte, die dieselbe Anzahl an Punkten und g_1 oder g_{n_3} enthalten). [nach **BakiKabadi˙Generalization Kabadi˙PolySolvable**] Das CHAL-TSP kann auf das Problem, in $\breve{G}$ einen kürzesten g_0-g_{n_3}-Weg W zu finden, linear reduziert werden. Mit 9 erhält man, dass $c_\partial + C(W)$ für einen kürzesten g_0-g_{n_3}-Weg W eine untere Schranke für die Länge einer Tour ist. Es verbleibt zu zeigen, dass aus einem kürzesten Weg eine Tour mit demselben Gewicht erhalten werden kann. Wenn gespeichert wird, für welche aufeinanderfolgenden Knoten des Randes (1.2) jeweils angenommen wird, kann auf optimale zulässige Quadrupel für jeden Abschnitt in konstanter Zeit zugegriffen werden.

Ausgehend vom Spaziergang, der den Rand zyklisch besucht, werden Kanten, deren Kosten in den Kostentermen optimaler, zulässiger Quadrupel für eine Kante aus W addiert werden, hinzugefügt; solche, deren Kosten subtrahiert werden, werden entfernt. Hierbei können Kanten doppelt hinzugefügt werden, ein derartiger Spaziergang kann jedoch wegen der Dreiecksungleichung abgekürzt werden.

Für den Nachweis, dass dies eine Tour definiert, genügt es zu zeigen, dass die Einfügung von zwei Abschnitten zwischen denselben zwei Punkten aus $\mathcal{O} \cup \mathcal{U}$ nicht optimal sein kann. Für o_1, u_{n_2} und o_{n_1}, u_1 können nur Abschnitte eingefügt werden, die g_1 bzw. g_{n_3}

enthalten. Von diesem gibt es per Definition eines Weges in W nur einen. Sei anderenfalls das Gegenteil angenommen. Betrachte ohne Einschränkung zwei Abschnitte $g_{i_1}, \dots, g_{i_2}$ und $g_{j_1}, \dots, g_{j_2}$ (mit $i_1 \leq i_2 < j_1 \leq j_2$), die zwischen o_i, o_{i+1} eingefügt werden sollen. Dann schneiden sich jedoch wegen der Kreisoptimalität von $(o_1, \dots, o_{n_1}, g_{n_3}, \dots, g_1)$ die Kanten $\{g_{i_2}, o_{i+1}\}$ und $\{o_i, g_{j_1}\}$, womit die Kosten der Einfügung des Abschnitts $g_{i_1}, \dots, g_{j_2}$ zwischen o_i und o_{i+1} geringere Kosten liefert als die separate Einfügung der beiden Abschnitte. Also können in einer optimalen Lösung W die Kanten (g_{i_1-1}, g_{i_2}), (g_{j_1-1}, g_{j_2}) und die Kanten des g_{i_2}-g_{j_1-1}-Weges durch die leichtere Kante (g_{i_1-1}, g_{j_2}) ersetzt werden, im Widerspruch zur Optimalität von W. Für $n \coloneqq |\mathcal{G}|$, $m \coloneqq |\mathcal{O} \cup \mathcal{U}|$ erhielte man direkt aus diesen Erkenntnissen eine Laufzeit von $O(n^2 m) + O(n^2 m + n) = O(n^2 m)$ zur Bestimmung einer optimalen Tour, wobei der erste Term die Laufzeit der Bestimmung von $C(\cdot, \cdot)$ ist, der zweite die Anwendung des Bellman-Ford-Algorithmus für azyklische Digraphen. $(g_i)_{i=1}^n$ liefert hierfür eine topologische Sortierung.

1.1.2. Dynamische Programmierung für lineare Laufzeit

Da die Berechnung der Knotengewichte im azyklischen Digraphen bisher der laufzeitbestimmende Schritt ist, bietet es sich an, die kürzeste Tour rekursiv zu bestimmen, da dann nicht der gesamte Graph $\breve{G}$ aufgebaut werden muss:

1.6 Definition (Monge-Eigenschaft, Tourfunktionen) *Sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ eine Matrix. Dann heißt A* Monge*, falls*

$$\forall 1 \leq i < j \leq m, 1 \leq k < l \leq n \colon a_{ik} + a_{jl} \leq a_{il} + a_{jk} \tag{1.3}$$

Definiere weiterhin die Funktionen $E, F, G \colon \{1, \dots, n_3\} \to \mathbb{R}_+$, wobei $E(i)$ die Länge einer optimalen Tour durch $\mathcal{O} \cup \mathcal{U} \cup \{g_1, \dots, g_i\}$ angibt, $F(i)$ ($G(i)$) die Länge einer optimalen Tour durch dieselbe Menge, wobei jedoch der letzte Abschnitt (also der Abschnitt, der g_i enthält) zwischen zwei Punkten der oberen (unteren) Menge eingefügt wird.

1.7 Lemma (GarciaJodraTejel˙EfficientMonge; GarciaTejel˙Using) *Für $i = 1, \dots, n_3$ und der Setzung $o_{n_1+1} \coloneqq u_1, o_0 \coloneqq u_{n_2+1}, u_0 \coloneqq o_{n_1}, u_{n_2+1} \coloneqq o_1$, sowie $G(0) \coloneqq c_\partial$ gilt*

$$E(i) = \min_{j \in \{0, \dots, n_1\}} \min_{k \in \{1, \dots, i\}} G(k-1) + c(g_k, g_i, o_j, o_{j+1}) \tag{1.4}$$

$$F(i) = \min_{j \in \{0, \dots, n_2\}} \min_{k \in \{1, \dots, i\}} G(k-1) + c(g_k, g_i, u_{j+1}, u_j) \tag{1.5}$$

$$G(i) = \min\{E(i), F(i)\} \tag{1.6}$$

(1.6) ist trivial. Die anderen beiden Gleichungen bedeuten lediglich, dass der letzte Abschnitt einen Anfangspunkt $g_k, k \leq i$ haben muss und eine optimale Tour offenbar durch eine optimale Wahl dieses k und der optimalen Einfügung aller Abschnitte aus $\{g_1, \dots, g_{k-1}\}$ erhalten wird. Nun werden Matrizen definiert, die jeweils die Monge-Eigenschaft besitzen. In dieser Form liefert dann ein Algorithmus aus **GarciaJodraTejel˙EfficientMonge** lineare Laufzeit für die Berechnung der Funktionswerte von E, F und G.

1.8 Definition *Definiere Matrizen* $B = (b_{ij})_{1\le i\le n_3, 0\le j\le n_1}$, $C = (c_{kl})_{0\le j\le n_1, 1\le k\le n_3}$, $B' = (b'_{ij})_{1\le i\le n_3, 0\le j\le n_2}$, $C' = (c'_{kl})_{0\le j\le n_2, 1\le k\le n_3}$ *durch*

$$\begin{aligned} b_{ij} &\coloneqq c[g_1, g_i] + \tilde{c}(g_i, o_{j+1}) - c(o_j, o_{j+1}) & c_{jk} &\coloneqq -c[g_1, g_k] + \tilde{c}(g_k, o_j) \\ b'_{ij} &\coloneqq c[g_1, g_i] + \tilde{c}(g_i, u_j) - c(u_{j+1}, u_j) & c'_{jk} &\coloneqq -c[g_1, g_k] + \tilde{c}(g_k, u_{j+1}), \end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{c}(x,y) = \begin{cases} \infty & x = g_j \text{ und } (y = o_1, u_{n_2}, j > 1 \text{ oder } y = o_{n_1}, u_1, j < n_3) \\ c(x,y) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt (beachte $c[g_1, g_i] - c[g_1, g_k] = c[g_k, g_j]$, falls $k \ge j$) $b_{ij} + c_{jk} = c(g_k, g_i, o_i, o_{i+1})$ und $b'_{ij} + c'_{jk} = c(g_k, g_i, u_{i+1}, u_i)$, also

$$\begin{aligned} E(i) &= \min_{j\in\{0,\dots,n_1\}} \min_{k\in\{1,\dots,i\}} G(k-1) + b_{ij} + c_{jk} \\ F(i) &= \min_{j\in\{0,\dots,n_2\}} \min_{k\in\{1,\dots,i\}} G(k-1) + b_{ij} + c_{jk} \\ G(i) &= \min\{E(i), F(i)\} \end{aligned}$$

Die Matrizen B, B', C, C' besitzen alle die Monge-Eigenschaft (sogar mit einer strikten Ungleichung), wie leicht aus der Kreisoptimalität gefolgert werden kann. Für B etwa gilt: Auf der rechten Seite von (1.3) steht die Summe des Gewichts der Kanten $\{g_i, o_{l+1}\}$ und $\{g_j, o_{k+1}\}$, die sich wegen Kreisoptimalität von $(o_1, \dots, o_{n_1}, u_{n_2}, \dots, u_1)$ schneiden; auf der linken Seite sind alle Terme identisch, das Gewicht dieser beiden Kanten wurde jedoch durch das Gewicht von $\{g_i, o_{k+1}\}$ und $\{g_j, o_{l+1}\}$ ersetzt, die per Definition sich schneidender Kanten leichter sind.

Daher kann ein Algorithmus aus **GarciaJodraTejel˙EfficientMonge** verwendet werden: [ohne Beweis, **GarciaJodraTejel˙EfficientMonge**] Es gibt einen Algorithmus, der linear in der Summe der Zeilen und Spalten von $n \times m$- bzw. $m \times n$-Monge-Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ (gegeben als Orakel, deren Aufrufe konstante Zeit benötigen) die Rekursion

$$F(i) = \min_{j\in\{1,\dots,m\}} \min_{k\in\{1,\dots,i\}} \{a_{ij} + b_{jk} + E(k-1)\}, F(0) \coloneqq c \in \mathbb{R},$$

löst, wobei $E(k-1)$ aus $F(k-1)$ in konstanter Zeit berechnet werden kann. Mit Definition 1.8 kann durch abwechselnde Berechnung von $E(i)$, $F(i)$ und $G(i)$ erhalten werden: Das Convex-Hull-and-Line-TSP kann linear in der Anzahl der Punkte gelöst werden. Nun wird im Fall von $G(n,d)$ aus **Hougardy˙IntRatioSEP** präsentiert, inwieweit sich der Algorithmus vereinfacht.

1.1.3. Spezialisierung für das 3-Lines-TSP

Sei

$$\ulcorner . \urcorner \colon \mathbb{N}/2 \to \mathbb{N}, n \mapsto \begin{cases} n+1 & n \in \mathbb{N} \\ \lceil n \rceil & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Rekursion (1.4), (1.5), (1.6) vereinfacht sich in diesem Fall mit 29 und **Hougardy˙IntRatioSEP**[2]

$$\begin{aligned} G(i) &= \min_{j\in\{0,\dots,n_1\}} \min_{k\in\{1,\dots,i\}} G(k-1) + c(g_k, g_i, o_j, o_{j+1}) \\ &= \min\left\{ \min_{k\in\{1,\dots,i\}} G(k-1) + c(g_k, g_i, o_{k+\lfloor\frac{k-i}{2}\rfloor}, o_{k+\ulcorner\frac{k-i}{2}\urcorner}), G(0) + c(g_1, g_i, o_1, u_{n_2}) \right\} \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, n_3 - 1$. Für $i = n_3$ gilt

$$\begin{aligned} G(n_3) = \min\Bigg\{ \min_{k\in\{1,\dots,n_3\}} \min\Big\{ & G(k-1) + c(g_k, g_i, o_{k+\lfloor\frac{k-i}{2}\rfloor}, o_{k+\ulcorner\frac{k-i}{2}\urcorner}), \\ & G(k-1) + c(g_k, g_{n_3}, o_{n_1}u_1) \Big\}, G(0) + c(g_1, g_{n_3}, o_1, u_{n_2}), \Bigg\} \end{aligned}$$

Sei nun die Matrix $\tilde{C} = (\tilde{c}_{ki})_{1\le k,i\le n_3}$ gegeben durch

$$\tilde{c}_{ki} \coloneqq c(g_k, g_i, o_{k+\lfloor\frac{k-i}{2}\rfloor}, o_{k+\ulcorner\frac{k-i}{2}\urcorner})$$

Dann erfüllt C abermals die Monge-Bedingung, was genau we für die Matrizen aus Definition 1.8 erhalten werden kann. Daher genügt es, die Rekursion $G(0) = c_\partial$

$$G(i) = \min_{k\in\{1,\dots,i\}} F(k) + c_{ki}$$

wobei $F(k)$ aus $G(k)$ in konstanter Zeit erhalten werden kann, zu lösen. Dies vermag ein einfacherer Algorithmus aus **LarmoreSchieber˙OnLineRNA** Dieser Algorithmus sieht $(F(k) + c_{ki})_{1\le k,i\le n_3}$ als eine Matrix an, in der Zeilenminima für jede Zeile gesucht sind und eine neue Zeile erst verfügbar wird, wenn das Minimum in der vorangegangenen gefunden wurde. Dieser reduziert abwechselnd dieses Problem auf ein Problem mit der halben Zeilenanzahl und auf ein quadratisches Problem. Damit kann ebenfalls lineare Laufzeit erhalten werden.

1.2. Convex-Hull-and-Y-TSP

Eine *Variante* des CHAL-TSP wurde in **GarciaTejel˙TwoConvexPolygon** studiert. Dabei sind zwei disjunkte kreisoptimale Familien gegeben, von denen eine innerhalb der anderen liegt. Für dieses Problem wurde ein exakter Lösungsalgorithmus mit Laufzeit $O(n^3m^3)$ mit m, n der Mächtigkeit der jeweiligen Familien vorgestellt. Eine naheliegende *Verallgemeinerung* von Definition 1.3 sind die ersten beiden Punkte der folgenden Definition.

[2] Dieses besagt, dass für einen Abschnitt $g_k \dots, g_i$, $k < i$ die Einfügung entweder zwischen $o_{k+\lfloor\frac{k-i}{2}\rfloor}$ und $o_{k+\lceil\frac{k-i}{2}\rceil}$ falls $i-k$ ungerade, bzw. zwischen $o_{k+\frac{k-i}{2}}$ und $o_{k+\frac{k-i}{2}+1}$ oder mit denselben Kosten zwischen $o_{k+\frac{k-i}{2}-1}$ und $o_{k+\frac{k-i}{2}}$ falls $i-k$ gerade, optimal ist.

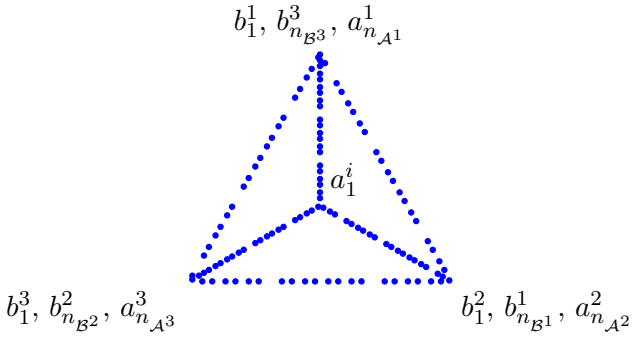


Figure 1.3.: Eine Einbettung einer Instanz des Tetraeder-TSP. Hierbei sind die Bezeichnungen der jeweils an den Schnittpunkten von Strecken dieser geradlinigen Einbettung des K_4 nächstliegenden Punkte dort notiert.

1.9 Definition (Convex-Hull-and-Y-TSP) *Eine Instanz (K_n, c) des TSP heißt genau dann* Convex-Hull-and-Y-TSP-Instanz*, wenn $V(G) = \mathcal{A}^1 \cup \mathcal{A}^2 \cup \mathcal{A}^3 \cup \mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2 \cup \mathcal{B}^3$, $\mathcal{A}^i = (a_1^i, \ldots, a_{n_{\mathcal{A}^i}}^i)$, $\mathcal{B}^i = (b_1^i, \ldots, b_{n_{\mathcal{B}^i}}^i)$, $i = 1, 2, 3$ existieren mit:*

- $(b_1^1, \ldots, b_{n_{\mathcal{B}^1}}^1, b_1^2, \ldots, b_{n_{\mathcal{B}^2}}^2, b_1^3, \ldots, b_{n_{\mathcal{B}^3}}^3)$, $(b_1^1, \ldots, b_{n_{\mathcal{B}^1}}^1, a_{n_{\mathcal{A}^2}}^2, \ldots, a_1^2, a_1^1, \ldots, a_{n_{\mathcal{A}^1}}^1)$, $(b_1^2, \ldots, b_{n_{\mathcal{B}^2}}^2, a_{n_{\mathcal{A}^3}}^3, \ldots, a_1^3, a_1^2, \ldots, a_{n_{\mathcal{A}^2}}^2)$, $(b_3^1, \ldots, b_{n_{\mathcal{B}^3}}^3, a_{n_{\mathcal{A}^1}}^1, \ldots, a_1^1, a_1^3, \ldots, a_{n_{\mathcal{A}^3}}^3)$ *sind kreisoptimal.*
- $\bigcup_{i=1}^3 \mathcal{A}^i$ *liegt innerhalb von* $(b_1^1, \ldots, b_{n_{\mathcal{B}^1}}^2, b_1^2, \ldots, b_{n_{\mathcal{B}^2}}^2, b_1^3, \ldots, b_{n_{\mathcal{B}^3}}^3)$.
- $\mathcal{A}^1$, $\mathcal{A}^2$, $\mathcal{A}^3$ *sind* weggekrümmt von $\mathcal{B}^2$ *bzw.* $\mathcal{B}^3$ *bzw.* $\mathcal{B}^1$*, das heißt, für* $j < k < l \in \{1, \ldots, n_{\mathcal{A}^i}\}, m \in \{1, \ldots, n_{\mathcal{B}^\ell}\}$ *schneiden sich die Kanten* $\{a_j^i, a_l^i\}$ *und* $\{a_k^i, b_m^{\ell(i)}\}$*, wobei* $\ell(1) \coloneqq 2, \ell(2) \coloneqq 3$ *und* $\ell(3) \coloneqq 1$.
- $\mathcal{A}^1$ *und* $\mathcal{A}^2$, $\mathcal{A}^2$ *und* $\mathcal{A}^3$ *sowie* $\mathcal{A}^3$ *und* $\mathcal{A}^1$ *trennen* $\mathcal{A}^3$ *von* $\mathcal{B}^1$ *bzw.* $\mathcal{A}^1$ *von* $\mathcal{B}^3$ *bzw.* $\mathcal{A}^2$ *von* $\mathcal{B}^1$*, das heißt, jede Kante zwischen den jeweils erstgenannten Mengen schneidet sich mit jeder, die zwischen den jeweils zweitgenannten Mengen verläuft.*

Die dritte und vierte Bedingung kommen hinzu, um die für geometrische Spezialfälle naheliegenden Aussagen von Lemma 1.10 und Lemma 1.10 beweisen zu können. Ein euklidisches Beispiel für eine Menge, die von einer anderen weggekrümmt ist, bildet eine Teilmenge eines Kreises, der von jeder Menge in seinem Inneren weggekrümmt ist. Auf den Fall des CHAL-TSP kehrt man zurück, wenn eine der Familien $(b_1^1, \ldots, b_{n_{\mathcal{B}^1}}^1, a_{n_{\mathcal{A}^2}}^2, \ldots, a_1^2, a_1^1, \ldots, a_{n_{\mathcal{A}^1}}^1)$, $(b_1^2, \ldots, b_{n_{\mathcal{B}^2}}^2, a_{n_{\mathcal{A}^3}}^3, \ldots, a_1^3, a_1^2, \ldots, a_{n_{\mathcal{A}^2}}^2)$, $(b_3^1, \ldots, b_{n_{\mathcal{B}^3}}^3, a_{n_{\mathcal{A}^1}}^1, \ldots, a_1^1, a_1^3, \ldots, a_{n_{\mathcal{A}^3}}^3)$ leer ist. Geraden sind von jeder Menge von Punkten weggekrümmt und offenbar gilt die geforderte Trennungseigenschaft im *Tetraeder-TSP* (siehe Figure 1.3), daher ist dies ein Beispiel für das CHAY-TSP. Es wird nun ein sehr kleiner Spezialfall herausgearbeitet und dieser mit einer zu section 1.1 analogen Reduktion gelöst.

Da weiterhin Proposition 1.2 gilt, werden im Folgenden Teilspaziergänge klassifiziert, die zwischen zwei in $b_1^1, \{b_1^1, b_2^1\}, \ldots, b_{n_{\mathcal{B}^1}}^1, \{b_{n_{\mathcal{B}^1}}^1, b_1^2\}, b_1^2, \ldots, b_{n_{\mathcal{B}^2}}^2, b_1^3, \ldots, b_{n_{\mathcal{B}^3}}^3 \{b_{n_{\mathcal{B}^3}}^3, b_1^1\}, b_1^2$

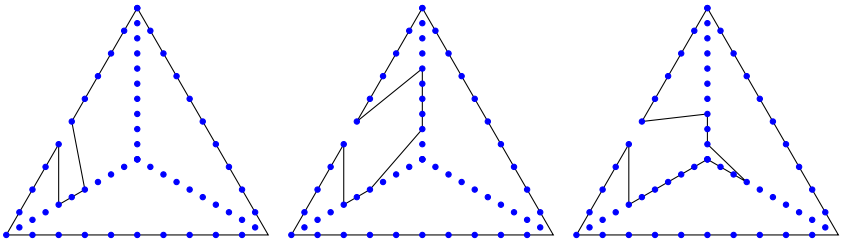
aufeinanderfolgenden Knoten (wieder mit *aufeinanderfolgende Knoten des Randes* bezeichnet) eingefügt werden. Diese heißen im Folgenden *Abschnitt*, die Menge $\mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2 \cup \mathcal{B}^3$ wird im Folgenden *Rand* genannt. Des weiteren wird mit *Abschnitt im Sinne des CHAL-TSPs* eine Menge von aufeinanderfolgenden Knoten aus einer Menge $\mathcal{A}^i, i = 1, 2, 3$ gemeint.

1.10 Lemma *Es können keine internen Kanten aus $\mathcal{A}^i$ vorkommen, die nicht in $(a^i_j)_{j=1}^{n_{\mathcal{A}^i}}$ aufeinanderfolgend sind.*

Sei das Gegenteil angenommen und $\{u, v\}$ eine solche Kante, sowie A die Menge der Knoten, die bzgl. $(a^i_j)_{j=1}^{n_{\mathcal{A}^i}}$ zwischen u und v liegen. B sei der Rand. Sei $W = (\{u, v\}, \{u, v\})$ der Weg, der nur die Kante $\{u, v\}$ enthält. Sei nun V ein beliebiger A-B-Weg. Dieser muss eine Kante aus $\delta(A)$ enthalten. Ist keines der Enden dieser Kante auf dem Rand, so gibt es einen Widerspruch zur Kreisoptimalität einer der beiden kreisoptimalen Familien, die u und v enthalten. Ist anderenfalls ein Knoten des Randes ein Endpunkt, so widerspricht das entweder abermals der Kreisoptimalität der Familie, die u, v und diesen Knoten enthält, oder es kann der dritte Punkt von Definition 1.9 angewandt werden. Das *Level* eines Abschnitts ist die Anzahl an Kanten zwischen den Mengen $\mathcal{A}^i$, die dieser durchläuft. Die Abschnitte des Levels 0 sind genau Abschnitte im Sinne des CHAL-TSPs. Die Abschnitte des Level 1 sind Abschnitte im Sinne des CHAL-TSPs auf zwei Mengen $\mathcal{A}^i, \mathcal{A}^j$, die durch eine Kante verbunden werden (siehe Figure 1.4). Analog erhält man, dass ein Abschnitt vom Level k aus $k + 1$ Abschnitten im Sinne des CHAL-TSP besteht. Wenn ein Abschnitt des Levels 2 Punkte aus allen drei Mengen $\mathcal{A}^i, i = 1, 2, 3$ enthält, so enthält dieser auch die Knoten $a^i_1, i = 1, 2, 3$. Sei das Gegenteil angenommen und W der von diesem Abschnitt induzierte Weg. Da der Abschnitt Level 2 ist, kann er jede Menge $\mathcal{A}^i$ wegen Lemma 1.10 nur mit einem Abschnitt im Sinne des CHAL-TSP besuchen. Daher teilt W die Mengen der von ihm nicht besuchten Kanten aus $\mathcal{A}^i$ in jeweils zwei Mengen aufeinanderfolgend indizierter Knoten. Sei die Vereinigung der Mengen mit den jeweils kleineren Indizes A und B der Rand. Dann betrachte abermals einen A-B-Weg V. Dieser schneidet wieder W, entweder wegen Kreisoptimalität der Familien, die einen in V die Menge A verlassenden Knoten v enthalten. Oder, da jeweils zwei Mengen $\mathcal{A}^i, \mathcal{A}^j$ die dritte Menge $\mathcal{A}^k, i \neq j, k, j \neq k$ von dem Randstück, mit denen sie eine kreisoptimale Familie bilden, trennen. Seien Abschnitte des Levels 2 *von Typ* 1, wenn sie die Bedingung aus Lemma 1.10 erfüllen. Wir erhielten bei Versuchen mit kleinen Instanzen des Tetraeder-TSPs (bis etwa 150 Knoten) lediglich Abschnitte vom Level 2 Typ 2 und vom Level 0 und zeigen im nächsten Unterabschnitt, wie einige Abschnitte höheren Levels im Falle des Tetraeder-TSPs zu Abschnitten niedrigeren Typs verkürzt werden können. Nun wird mit folgender, sehr starker, **Annahme** weitergearbeitet:

Es gibt eine optimale Tour, die nur Level-0 oder -2-Typ-2-Abschnitte enthält. (1.7)

Unter dieser Voraussetzung kann ein Algorithmus angegeben werden.



(a) Level 0 (b) Level 1 (c) Level 2, Typ 1

Figure 1.4.: Beispiele für Abschnitte der drei betrachteten Level

Hierfür seien wieder

$$c_\partial \coloneqq \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{n_{\mathcal{B}^i}-1} c(a^i_j, a^i_{j+1}) + c(a^1_{n_{\mathcal{A}^1}}, a^2_1) + c(a^2_{n_{\mathcal{A}^2}}, a^3_1) + c(a^3_{n_{\mathcal{A}^3}}, a^1_1)$$

die *Kosten des Randes*. Es kann wegen Lemma 1.10 nur maximal einen Level-2-Abschnitt des Typs 1 geben. Daher geht die folgende (einfache) Reduktion alle Möglichkeiten für die Wahl dieses Abschnitts durch und berechnet für diese Wahl des Abschnitts des Level 2 die optimale Einfügung der Level-0-Abschnitte.

Definiere eine Familie reduzierter Graphen $\{\breve{G}_{i_1,i_2,i_3} | 1 \leq i_j \leq n_{\mathcal{A}^j}, j \in 1,2,3\}$ als

$$\begin{aligned}\breve{G}_{i_1,i_2,i_3} \coloneqq ((a^1_i)_{i=i_1}^{n_{\mathcal{A}^1}} \cup (a^2_i)_{i=i_2}^{n_{\mathcal{A}^2}} \cup (a^3_i)_{i=i_3}^{n_{\mathcal{A}^3}} \cup \{A\} \cup \{\Omega\},\\ \{(A, a^j_{i_j}), (a^j_{n_{\mathcal{A}^j}}, \Omega) | j = 1,2,3\} \cup \{(a^k_i, a^k_j) | k = 1,2,3, i_k \leq i < j \leq n_{\mathcal{A}^k}\})\end{aligned}$$

Wie beim CHAL-TSP (Definition 1.5) seien Kantengewichte $C(a^k_j, a^k_j)$ entsprechend der minimalen Kosten der Einfügung des Abschnitts $a^k_{j+1}, \ldots, a^k_j$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knoten des Randes gegeben. Hierbei kann eine Orientierung lediglich im Falle einer Kante (a^k_i, a^k_j), die zwischen Knoten, die mit a^k_i, a^k_j in einer gemeinsamen kreisoptimalen Familie enthalten sind, ausgeschlossen werden. In allen anderen Fällen muss in konstanter Zeit hier ein weiteres Minimum gebildet werden. Seien Einheitskapazitäten $u : E(\breve{G}_{i_1,i_2,i_3}) \to \{1\}$ und $b\colon V(\breve{G}_{i_1,i_2,i_3}) \to \{0,3\}, b(A) = b(\Omega) = 3, b(v) = 0, \forall v \in V(\breve{G}_{i_1,i_2,i_3})$ definiert. Seien weiterhin $C(i_1,i_2,i_3)$ die minimalen Kosten der Einfügung des Abschnitts des Levels 2 und des Typs 1, der aus den Punkten $\bigcup_{j=1}^{3} \bigcup_{i=1}^{i_j} a^j_i$ besteht, zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knoten des Randes einzufügen.

Nun kann folgende Reduktion durchgeführt werden:

1.11 Proposition *Unter der Annahme* (1.7) *gilt: Der Algorithmus 1 ist korrekt und kann mit Laufzeit* $O(n_{\mathcal{A}^1} n_{\mathcal{A}^2} n_{\mathcal{A}^3}((n_{\mathcal{B}^1} + n_{\mathcal{B}^2} + n_{\mathcal{B}^3})(n^2_{\mathcal{A}^1} + n^2_{\mathcal{A}^2} + n^2_{\mathcal{A}^3}) + F(n_{\mathcal{A}^1} + n_{\mathcal{A}^1} + n_{\mathcal{A}^1}, n^2_{\mathcal{A}^1} + n^2_{\mathcal{A}^1} + n^2_{\mathcal{A}^1}))$*, mit* $F(n,m)$ *der Laufzeit eines Algorithmus für das Minimum-Cost-Flow-Problem auf azyklischen, dichten Graphen mit Einheitskapazitäten mit* n *Knoten und* m *Kanten.*

Für die Laufzeit: Die For-Schleife wird $(n_{\mathcal{A}^1} n_{\mathcal{A}^2} n_{\mathcal{A}^3})$-mal durchlaufen. Die Berechnung der Kantenkosten, die Erstellung der Listen $(A_{b^j_i})$ und $(\tilde{A}_{b^j_i})$, sowie Zeile 7 geht

Algorithmus 1 : Algorithmus für das CHAY-TSP unter der Annahme (1.7)

Input : Eine Instanz $\mathcal{A}^i = (a^i_1, \ldots, a^i_{n_{\mathcal{A}^i}})$, $\mathcal{B}^i = (b^i_1, \ldots, b^i_{n_{\mathcal{B}^i}})$, $i = 1, 2, 3$ des CHAY-TSP

Output : Unter der Annahme (1.7): Die Länge einer optimalen Tour des CHAY-TSP oder `zu komplex`

1 Min $:= \infty$;
2 Berechne C;
3 **for** $i_1 = 1$ *to* $n_{\mathcal{A}^1}$, $i_2 = 1$ *to* $n_{\mathcal{A}^2}$, $i_3 = 1$ *to* $n_{\mathcal{A}^3}$ **do**
4 Baue den Graphen $\breve{G}_{i_1,i_2,i_3}$ auf und berechne $C(i_1, i_2, i_3)$;
5 Speichere in Listen $(A_{b^j_i})_{j=1,2,3,1\leq i\leq n_{\mathcal{B}^j}}$ für jedes aufeinanderfolgende Knotenpaar des Randes das 3-Tupel, für das das Minimum in $C(i_1, i_2, i_3)$ und für alle Kanten aus $\breve{G}_{i_1,i_2,i_3}$ in C angenommen wird ;
6 Löse die Instanz $(\breve{G}_{i_1,i_2,i_3}, u, b, C)$ des Minimum-Cost-Flow-Problems, sei K der optimale Lösungswert und $(\tilde{A}_{b^i_j})$ Teillisten, so dass nur voll ausgelastete Kanten der Optimalösung und das 3-Tupel einbezogen werden;
7 **if** $K + C(i_1, i_2, i_3) <$ Min *und alle* $\tilde{A}_{b^j_i}$ *enthalten nur Elemente aus einer Menge* $\mathcal{A}^k$ *für* $i, k = 1, 2, 3, 1 \leq j \leq n_{\mathcal{B}^j}$ **then** Min $:= K + C(i_1, i_2, i_3)$;
8 **if** Min $= \infty$ **then return** `zu komplex`;
9 **else return** $c_\partial +$ Min;

in $O((n_{\mathcal{B}^1} + n_{\mathcal{B}^2} + n_{\mathcal{B}^3})(n^2_{\mathcal{A}^1} + n^2_{\mathcal{A}^2} + n^2_{\mathcal{A}^3}))$. Da sonst nur noch ein Minimum-Cost-Flow-Problem pro Iteration der For-Schleife gelöst werden muss, ist die Laufzeit wie angegeben.

Für die Korrektheit: Da es unter Annahme (1.7) optimale Touren gibt, die durch Einfügen von Abschnitten des Levels 0 und eines Abschnittes des Levels 2 Typ 2 zwischen aufeinanderfolgenden Kanten des Randes entsteht und hier über alle solchen Möglichkeiten minimiert wird, ist der Ausgabewert eine untere Schranke für den Optimalwert.

Daher ist wie in 29 nur zu zeigen, dass keine zwei Abschnitte zwischen demselben Paar aufeinanderfolgender Knoten des Randes eingefügt werden, denn dann wird die erhaltene Optimallösung auch als Tour realisiert. Wenn zwei Abschnitte zwischen demselben Paar aufeinanderfolgender Knoten des Randes eingefügt werden sollen, ist dies offenbar äquivalent dazu, dass $|\tilde{A}_{b^j_i}| > 1$. Wenn alle Kanten aus $\tilde{A}_{b^j_i}$ in einer Menge $\mathcal{A}^k$ liegen, kann genauso wie im Beweis von 29 die optimale Lösung der Reduktion durch einen Kantenaustausch verkürzt werden.

Andere Fälle sind wegen der zweiten Bedingung von Z. 7 nicht möglich. Damit folgt auch Korrektheit. Der angegebene Algorithmus ist weder sehr schnell, noch liefert er in vielen Fällen eine Lösung. Vor allem die zweite Bedingung in Zeile 7 schränkt die Anwendbarkeit stark ein. Diese ist aber nicht unnötig: Sollen Abschnitte im Sinne des CHAL-TSP, die in unterschiedlichen Mengen $\mathcal{A}^i$ liegen, zwischen demselben Paar eingefügt werden, könnte dies nur durch einen Abschnitt vom Level 1 verkürzt wer-

den. Dies kann aber nicht zu einem Widerspruch zur Optimalität des kostenminimalen b-Flusses in $\breve{G}_{i_1,i_2,i_3}$ geführt werden, da in diesem Graphen keine Level-1-Abschnitte abgebildet werden können.

Da weiterhin Aussagen über das CHAY-TSP in diesem Abschnitt nur auf Kosten der Erweiterung der Definition und starker Annahmen zustande kamen, muss möglicherweise ein stärkerer Begriff als der der Kreisoptimalität für diesen Fall erdacht werden. Ein weiteres Umfeld der Untersuchung wäre die Charakterisierung anderer geometrischer Spezialfälle durch einbettungsunabhängige Axiome.

2. Eine Instanz mit großer Integrality Ratio

In diesem Kapitel wird eine Folge von Instanzen mit asymptotischer Integrality Ratio 4/3 angegeben. Diese ist eine Variante der Klasse, die in **Hougardy˙IntRatioSEP** betrachtet wurde, und liefert vermutlich schnellere Konvergenz. Zur besseren Lesbarkeit wird der Unterschied zwischen einer Punktmenge und einer Instanz des TSP vernachlässigt. Man beachte jedoch den Beginn von chapter 1.

2.1 Definition (Domino-Instanz) *Die* Domino-Instanz *des euklidischen TSP wird durch die Punktmenge*

$$\mathcal{I}_{n,d} \coloneqq \{(i, j \cdot d) | i = 1, \ldots, n, j = 1, 2, 3\} \cup \{(i, d + j \cdot \frac{2d}{n}) | i = 1, n, j = 1, \ldots, n\}$$

für $n \in 2\mathbb{N}$ *und* $d \in \mathbb{R}_+$ *definiert. Die drei Mengen* $\mathcal{G}_{n,d} \coloneqq \{(i, 2d) | i = 2, \ldots, n-1\}$, $\mathcal{O}_{n,d} \coloneqq (\mathcal{I}_{n,d} \setminus \mathcal{G}_{n,d}) \cap \{(x, y) | y \geq 2d\}$ *und* $\mathcal{U}_{n,d} \coloneqq \mathcal{I}_{n,d} \setminus (\mathcal{O}_{n,d} \cup \mathcal{G}_{n,d})$ *bilden eine Partition der Knotenmenge.*

Damit wird jeder Repräsentant dieser Instanzenfamilie bei Nummerierung von $\mathcal{G}_{n,d}$ nach aufsteigendem x-Wert und von $\mathcal{O}_{n,d}$ und $\mathcal{U}_{n,d}$ geeignet zyklisch (siehe Figure 2.1) zu einer Instanz des CHAL-TSP. Es ist zu beobachten, dass die optimale Tour dieser Instanzenfamilie mit dem Verfahren aus subsection 1.1.2 in linearer Zeit bestimmt werden kann. Weiterhin ist die Instanzenfamilie $\mathcal{I}_{n,d}$ eine echte Obermenge von $G(n, d)$ aus **Hougardy˙IntRatioSEP** Daher muss eine optimale Tour für $\mathcal{I}_{n,d}$ wegen der Gültigkeit der Dreiecksungleichung mindestens so lange sein wie eine für $G(n, d)$. Obwohl die in Figure 2.1 gegebene, für das SEP zulässige Lösung für $\mathcal{I}_{n,d}$ strikt höhere Kosten als die in

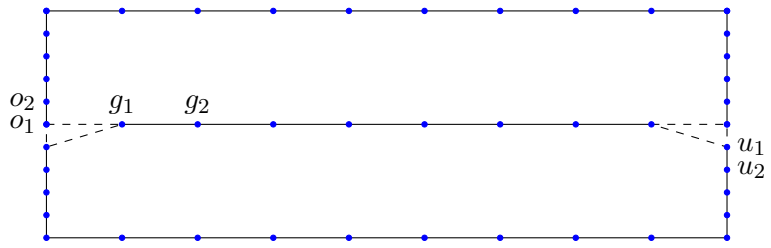


Figure 2.1.: Die Instanz $\mathcal{I}_{10,1,5}$ mit einer eingezeichneten Subtourlösung. Hierbei bedeuten durchgezogene Strecken einen x-Wert von 1 auf der entsprechenden Kante, gestrichelte einen Wert von 1/2. Die entsprechende Lösung für allgemeine n, d hat die Länge $3(n-1) + 4d - 2d/n - 1 + \sqrt{1 + (2d/n)^2}$, wie man leicht nachrechnet.

Hougardy˙IntRatioSEP für $G(n,d)$ angegebene Optimallösung hat, liefert die triviale, durch die Werte einer der optimalen Tour für $G(n,d)$ (siehe **Hougardy˙IntRatioSEP**) und dem Gewicht der Lösung aus Figure 2.1 erhaltene Abschätzung für $\mathcal{I}_{n,\sqrt{n-1}}, n \in \mathbb{N}_{\geq 17} \cap 2\mathbb{N}$ eine nur wenig geringere untere Schranke für die Integrality Ratio: Es wird der Term

$$\frac{4n-4+2\sqrt{n-1}}{3n-4+4\sqrt{n-1}-{}^{2\sqrt{n-1}}/_{n}+\sqrt{1+({}^{4(n-1)}/_{n^2})}} \tag{2.1}$$

erhalten, welcher ebenfalls gegen die in **Hougardy˙IntRatioSEP** erhaltene untere Schranke von $4/3$ konvergiert und für $n = 100$ den Wert $1,2355$, nur etwa $0,003$ weniger als der für $G(n,\sqrt{n-1})$ erhaltene, hat. Da trotz der doppelten Anzahl an Punkten in der Instanz kaum eine Erhöhung des Werts einer optimalen Subtour-Lösung relativ zur Länge der für $G(n,\sqrt{n-1})$ optimalen Tour liefert, wird im Folgenden genauer die Länge einer optimalen Tour nach unten abgeschätzt um eine größere untere Schranke als in **Hougardy˙IntRatioSEP** für die Integrality Ratio zu erhalten. Die Instanz ist symmetrisch bzgl. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2d\}$, daher werden im Folgenden ohne Einschränkung alle Abschnitte zwischen Punkten aus $\mathcal{O}_{n,d}$ eingefügt, denn jede Tour kann in eine solche ohne Veränderung der Länge transformiert werden.

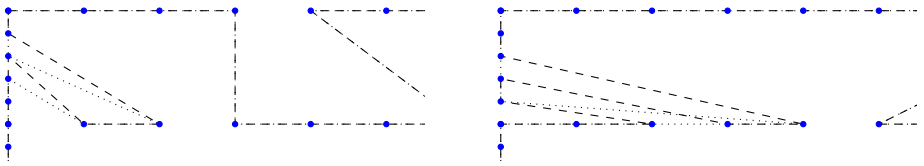
2.2 Lemma *Eine optimale Tour für die Instanz $\mathcal{I}_{n,d}$ enthält maximal je einen Abschnitt, der zwischen Punkten $o_{i+1} = (1, 2d + i\frac{2d}{n})$ und $o_{i+2} = (1, 2d + (i+1)\frac{2d}{n})$ bzw. $o_{n_1-i} = (n, 2d + i\frac{2d}{n})$ und $o_{n_1-(i+1)} = (n, 2d + (i+1)\frac{2d}{n})$ $i = 0, \ldots, \frac{n}{2}$ besucht wird. Dieser wird zwischen o_1 und o_2 bzw. o_{n_3-1} und o_{n_3} eingefügt.*

Die Aussage wird für Punkte der Form $(1, 2d+i\frac{2d}{n})$ und $(1, 2d+(i+1)\frac{2d}{n})$, $i = 0, \ldots, \frac{n}{2}-1$ gezeigt, der andere Fall ist analog.

Zuerst ist zu bemerken, dass für $i = 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1$ die Einfügung eines Abschnitts zwischen $(1, 2d + (i-1)\frac{2d}{n})$ und $(1, 2d + i\frac{2d}{n})$ immer günstiger als das Einfügen zwischen $(1, 2d+i\frac{2d}{n})$ und $(1, 2d+(i+1)\frac{2d}{n})$ ist (siehe Abb. 2.2(a)). Daher kann angenommen werden, dass die Punktepaare aus $\mathcal{O}_{n,d} \cap \{(x,y) | x = 1\}$, zwischen denen Abschnitte eingefügt werden, bzgl. $\mathcal{O}_{n,d} = (o_i)_{i=1}^{n_3}$ aufeinanderfolgend sind und ein Abschnitt zwischen o_1 und o_2 eingefügt wird.

Seien nun zwischen den ersten beiden Paaren $o_1 = (1, 2d)$, $o_2 = (1, 2d + \frac{2d}{n})$ und $o_3 = (1, 2d + 2 \cdot \frac{2d}{n})$, $o_4 = (1, 2d + 3 \cdot \frac{2d}{n})$ aus $\mathcal{O}_{n,d}$ Abschnitte $(2, 2d), \ldots, (2 + k, 2d)$ bzw. $(2 + k + 1, 2d), \ldots, (3 + k + l, 2d)$ $k, l \geq 0$ eingefügt (die Wahl des zwischen o_1 und o_2 eingefügten Abschnitts ist mit Lemma 1.4 keine Einschränkung). Dann ist die Kostendifferenz zwischen dieser Einfügung von Abschnitten und der Einfügung von $(2, 2d), \ldots, (3 + k + l, 2d)$ zwischen o_1 und o_2 (im Folgenden wird eine solche Kostendifferenz als *Kosten der Modifikation* bezeichnet; siehe Abb. 2.2(b) für eine Illustration dieser Modifikation)

$$1 + \frac{2d}{n} + \sqrt{(3+k+l)^2 + \left(\frac{2d}{n}\right)^2} - \sqrt{(k+1)^2 + \left(\frac{2d}{n}\right)^2} - \sqrt{(k+2)^2 + \left(\frac{2 \cdot 2d}{n}\right)^2} - \sqrt{(3+k+l)^2 + \left(\frac{3 \cdot 2d}{n}\right)^2} < 0,$$



(a) (b)

Figure 2.2.: Eine Skizze zum Beweis von Lemma 2.2. Zur Ermittlung der Kosten der jeweiligen Modifikation müssen Längen von Strecken, die lediglich gepunktet sind, addiert, Längen von nur gestrichelten abgezogen werden.

denn die Summe des ersten und vierten, zweiten und fünften, sowie dritten und sechsten Summanden sind alle wegen $k, l, d \geq 0$ negativ.

Damit folgt die Aussage, weil eine Tour, die die geforderte Struktur nicht hat, durch eine der beiden Modifikationen aus Figure 2.2 verkürzt werden kann.

2.3 Lemma *In einer optimalen Tour ist die* Länge *der Abschnitte (also die Anzahl der Punkte, die diese enthalten) die zwischen* $(1, 2d)$ *und* $(1, 2d + \frac{2d}{n})$ *bzw.* $(n, 2d)$ *und* $(n, 2d + \frac{2d}{n})$ *eingefügt werden (im Folgenden als* flache Abschnitte *bezeichnet), höchstens um Eins verschieden.*

Sei angenommen, dies gelte nicht. Dann sind die Längen um mindestens 2 verschieden. Seien etwa $g_1, \ldots, g_i$ und $g_{n_3-k+1}, \ldots g_{n_3}$ die flachen Abschnitte mit $k \geq i + 2$. Dann sind die Kosten der Strecken, die o_1 und g_i bzw. g_{n_3-k+1} und o_{n_1} miteinander verbinden

$$\sqrt{i^2 + \frac{4d^2}{n^2}} + \sqrt{k^2 + \frac{4d^2}{n^2}}.$$

Da jedoch

$$D(x) \coloneqq \sqrt{x^2 + \frac{4d^2}{n^2}}$$

in x strikt konvex ist, gilt $D(k-1) + D(i+1) < D(i) + D(k)$. Da die Länge einer Tour durch die Verlängerung eines flachen Abschnitts und der Verkürzung des anderen sich nur bezüglich dieser Diagonalen ändert, kann eine solche Tour strikt verkürzt werden: Andere Abschnitte, die wegen Lemma 2.2 und 33 in $\mathcal{O}_{n,d} \cap \{(x, y) | y = 3d\}$ eingefügt werden, können geeignet ohne Veränderungen der Kosten einer Tour so translatiert werden, dass diese Modifikation immer die Zulässigkeit einer Tour erhält (siehe auch **Hougardy˙IntRatioSEP** für ein sehr ähnliches Argument).

2.4 Definition *Sei* $(i, 2d), \ldots, (j, 2d)$ *ein Abschnitt, der zwischen* $(k, 3d), (k + 1, 3d)$ *eingefügt wird. Dann wird der* linke *(*rechte*)* Überhang *als* $k - i$ *(*$j - (k + 1)$*) definiert.*

Aus **Hougardy˙IntRatioSEP** *folgt, dass für nicht-flache Abschnitte mindestens einer der Überhänge eines Abschnitts positiv ist (dort wird der Überhang als Eintrag eines sogenannten* z-Vektors *bezeichnet).*

Alle bisherigen Aussagen gelten für alle n, d, nun wird die Klasse der der Funktionen $d(n)$ eingeschränkt. Es können in der Regel keine flachen Abschnitte der Länge k um einen Knoten verkürzt und ein benachbarter Abschnitt mit linkem Überhang l um einen Knoten verlängert werden, und dabei die Kosten verringert werden. Obwohl für die Kosten für alle *festen* $k, l \geq 0$

$$\underbrace{\sqrt{(k-1)^2 + \left(\frac{2d}{n}\right)^2} - \sqrt{k^2 + \left(\frac{2d}{n}\right)^2}}_{\to -1 \Leftrightarrow d \in o(n)} + \underbrace{\sqrt{(l+1)^2 + d^2} - \sqrt{l^2 + d^2}}_{\to 0 \Leftrightarrow d \in \omega(1)}. \tag{2.2}$$

gilt, wird der gesamte Ausdruck selbst für $d(n) \in o(n) \cap \omega(n)$ ab einem bestimmten n positiv, wenn etwa k minimal als 1 und l maximal als $\frac{n-4}{2} - 1$ gewählt wird. Damit kann die Suche nach einer optimalen Lösung für die Instanz $\mathcal{I}_{n,d}, d \geq 4$ wie folgt durchgeführt werden:

Es wird die Länge k der beiden flachen Abschnitte (die wegen Lemma 2.3 durch k eindeutig bestimmt sind) so bestimmt, dass die Tour, die durch Einfügung von Abschnitten aus $\{g_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}, \ldots, g_{n_3 - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor}\}$ (also den Knoten, die nicht in den flachen Abschnitten enthalten sind) zwischen Knotenpaaren aus $\mathcal{O}_{n,d}$ entsteht, kürzestmöglich ist. Dabei kann wegen der Bemerkung am Ende von Definition 2.4 angenommen werden, dass keine Abschnitte zwischen Punkten eingefügt haben, die dieselbe x-Koordinate wie Punkte der flachen Abschnitte oder x-Koordinate 1 oder n haben. Somit reduziert sich, gegeben k, die Suche auf eine Suche einer kürzesten Tour in $G(n - k - 2, d)$: Die Länge einer Tour definiert eine Quasiordnung auf der Menge der Touren.

Weiterhin gibt es eine ordnungserhaltende Bijektion zwischen der Menge der Touren auf $\mathcal{I}_{n,d}$, die flache Abschnitte mit zusammen k Knoten enthalten und denen auf $G(n-k-2, d)$, in denen Abschnitte, die den zweiten und vorletzten Knoten der mittleren Gerade enthalten, nicht zwischen Paaren aus der oberen Gerade eingefügt werden können (bei **Hougardy˙IntRatioSEP** eine Voraussetzung für die *z-Form* der Touren). Dafür werden die zwei roten Kanten in Figure 2.3 entfernt, und alle y-Koordinaten auf den oberen beiden Geraden $\{(x, y)|y = 2d\}$ und $\{(x, y)|y = 3d\}$ vertauscht. Diese ist ordnungserhaltend, da nur Kanten konstanter Länge hinzugefügt oder entfernt werden. Daher liefert für gegebenes $d(n)$ und $d(n) \geq 4$ (dies impliziert, dass alle Abschnitte, die den zweiten oder vorletzten Knoten der mittleren Geraden enthalten, wie in 34 eingefügt werden, vgl. **Hougardy˙IntRatioSEP**) ein zweidimensionales Minimierungsproblem eine untere Schranke (wie in **Hougardy˙IntRatioSEP**) Daran sollte im weiteren gearbeitet werden.

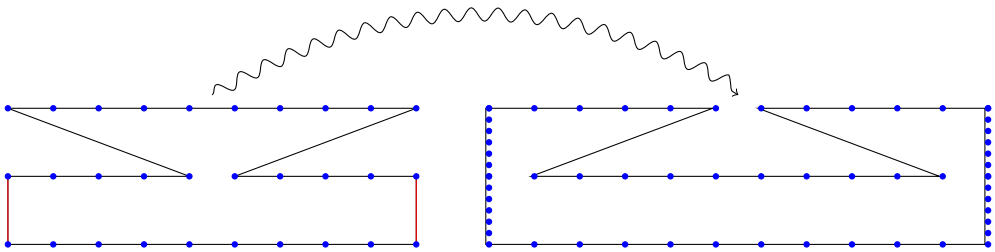


Figure 2.3.: Zum Erhalt einer optimalen Tour für eine Instanz von $\mathcal{I}_{n,d}$ aus einer optimalen Tour mit Nebenbedingung für $G(n-k-2,d)$ (hier $k=0$)

A. Anhänge

A.1. Instanzen mit trivialer Integrality Ratio

In diesem ersten Anhang werden zwei einfache notwendige und eine hinreichende Bedingungen dafür gegeben, dass eine Instanz des 1-2-TSP eine *triviale Integrality Ratio* (also eines Integrality Ratio des Werts 1) besitzt. Dies ist offenbar äquivalent dazu, dass eine Instanz *an einer ganzzahlige Ecke optimiert* wird.

Sei eine Instanz (K_n, c) des 1-2-TSP gegeben. Dann wird als *Einsgraph* der Graph $\mathbb{G} = (V(G), \{e \in E(G) | c(e) = 1\})$ bezeichnet und $n \coloneqq |V(G)|$ gesetzt. Einfache hinreichende Bedingungen für Optimierung an einer ganzzahligen Ecke sind:

- Der Einsgraph ist hamiltonsch.
- Der Einsgraph ist leer.
- $n \leq 5$

Wobei die ersten beiden hinreichend sind, da $n \min_{e \in E(G)} c(e)$ nach den Grad-Gleichung"-en (2FG) eine triviale untere Schranke für die Optimallösung des SEP liefert und diese Schranke in den beiden Fällen gleich $\mathrm{OPT}_{\mathrm{TSPP}(n)}$ ist. Die dritte ist hinreichend, da TSPP(n) für $n \leq 5$ ganzzahlig ist (siehe section A.2).

A.1.1. Hinreichende Bedingungen

1.1 Proposition *Sei (K_n, c) eine Instanz des 1-2-TSP und $\mathbb{G}$ der zugehörige Einsgraph. Wenn $\mathbb{G}$ aus $k \geq 2$ Zusammenhangskomponenten besteht, die jeweils Hamiltonwege enthalten, so ist die Integrality Ratio für diese Instanz gleich Eins.*

Offenbar ist in diesem Fall $\mathrm{OPT}_{\mathrm{TSPP}(n)} \leq 2k + (n - k) = k + n$ (siehe Figure A.1). Der Wert einer optimalen SEP-Lösung wird nur dadurch bestimmt, wie groß die Summe der x-Werte auf Kanten des Gewichts 2 ist. Wenn nachgewiesen wird, dass dieses größer gleich k ist, so folgt die Aussage wegen $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SEP}(n)} \leq \mathrm{OPT}_{\mathrm{TSPP}(n)}$.

Seien $Z_1, \ldots, Z_k$ die Zusam"-men"-hangs"-kom"-po"-nen"-ten von $\mathbb{G}$. Die Subtour-Eli"-mi"-na"-tions-Ungleichungen (SU′) für die ungerichteten Schnitte $\delta(Z_i), i = 1, \ldots, k$ liefern

$$x(\delta(Z_i)) \geq 2.$$

Damit erhält man mit $\overline{G}$ als Schreibweise für den *Komplementgraphen* eines Graphen G und, da Kanten aus K_n in maximal zwei der Schnitte $\delta(Z_i)$ enthalten sein können

$$2x(E(\overline{\mathbb{G}})) \geq \sum_{i=1}^{k} x(\delta(Z_i)) \geq 2k,$$

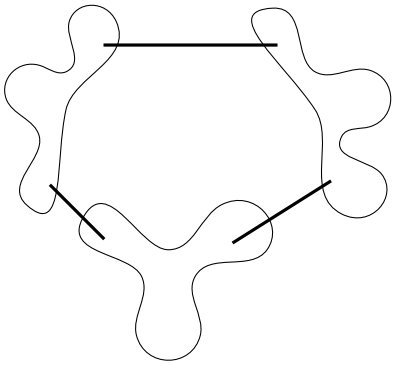


Figure A.1.: Eine Abbildung zum Beweis von Proposition A.1. Eingezeichnet sind die k (hier $k = 3$) Kanten des Gewichts Zwei.

wie gewünscht. Für zusammenhängende Graphen, die einen Hamiltonweg enthalten, gilt dies keineswegs, wie Abb. 1(b) auf Seite iii, ein Beispiel für die größte bisher bekannte Integrality Ratio für das 1-2-TSP, zeigt. Ein weiteres Kriterium ist:

1.2 Proposition *Sei (K_n, c) eine Instanz des 1-2-TSP und $\mathbb{G}$ nicht 2-kan"-ten"-zu"-sam"-men"-häng"-end, besitze aber einen Hamiltonweg. Dann ist die Integrality Ratio trivial.*

Es gilt offenbar $\mathrm{OPT}_{\mathrm{TSPP}(n)} \leq (n-1)+2 = n+1$. Sei nun $e = \{v, w\}$ eine Brücke in $\mathbb{G}$. Sei Z eine der Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{G} - e$. Dann gilt $x(e) + x(\delta_{\overline{\mathbb{G}}}(Z)) = x(\delta_G(Z)) \geq 2$ und für das Gewicht in $E(\overline{\mathbb{G}})$

$$x(E(\overline{\mathbb{G}})) \geq x(\delta_{\overline{\mathbb{G}}}(Z)) \geq 2 - x(e) \geq 2 - 1 = 1,$$

wie gewünscht.

A.1.2. Notwendige Bedingung

Nun wird das Beispiel aus Abb. 1(b) auf Seite iii verallgemeinert, um eine notwendige Bedingung für eine triviale Integrality Ratio zu erhalten.

1.3 Proposition *Sei (G, c) eine Instanz des 1-2-TSP. Sei $\mathbb{G}$ nicht hamiltonsch und enthalte $\mathbb{G}$ zwei Kreise C_1, C_2 gleicher Länge k, so dass k paarweise knotendisjunkte Wege $(W_i)_{i=1}^k$ existieren mit $\bigcup_{i=1}^k V(W_i) = V(G)$ und die Wege jeweils einen Knoten eines Kreises mit einem Knoten des anderen Kreises verbinden. Dann ist die Integrality Ratio nichttrivial.*

Unter diesen Bedingungen enthält $\mathbb{G}$ einen Hamiltonweg (ein Spaziergang, der diesen durchläuft, durchläuft abwechselnd einen der knotendisjunkten Wege und eine Kante des Kreises), womit $\mathrm{OPT}_{\mathrm{TSPP}(n)} = n + 1$ gilt. Eine Lösung des SEP ist gegeben durch

$$x(e) = 1 \Leftrightarrow e \in \bigcup_{i=1}^{k} E(W_i) \qquad\qquad x(e) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e \in E(C_1) \cup E(C_2)$$

und $x(e) = 0$ sonst. Diese Lösung hat einen Wert von n nach den Gradgleichungen (2FG), denn $\{e \in E(G) | x(e) > 0\} \subseteq E(\mathbb{G})$

A.2. Ganzzahligkeit des TSP-Polytops für Instanzen bis fünf Knoten

Der folgende Satz kann sehr implizit in **GroetschelPadberg˙Polyhedral** einem Darstellungssatz für das fraktionale perfekte 2-Matching-Polytop gefunden werden. Für Instanzen bis fünf Knoten ist die Integrality Ratio über alle symmetrischen Kostenfunktionen Eins. Es gilt offenbar bis zu diesem Wert, dass Inzidenzvektoren von Hamiltonkreisen genau Inzidenzvektoren perfekter 2-Matchings sind (denn eine Subtour muss mindestens drei Knoten enthalten). Offenbar sind die Lösungen des Ungleichungssystems mit Ganzzahligkeitsbedingung, das aus (SYM), (VB) und (2FG) von Seite ii besteht, genau die perfekten 2-Matchings. Bezeichne nun mit P2MP die konvexe Hülle der Menge aller perfekten 2-Matchings und mit FP2MP das Polytop aller Vektoren, die (2FG), (SYM) und $x_{ij} \in [0, 1]$ erfüllen. Dann gilt

$$\mathrm{OPT}_{\mathrm{FP2MP}(n)} \leq \mathrm{OPT}_{\mathrm{SEP}(n)} \leq \mathrm{OPT}_{\mathrm{TSPP}(n)} = \mathrm{OPT}_{\mathrm{P2MP}(n)} \overset{*}{=} \mathrm{OPT}_{\mathrm{FP2MP}(n)},$$

wobei nur $*$ eines Beweises bedarf. Ist dies gezeigt, folgt die Aussage.

Für $n = 1, 2$ sind P2MP und FP2MP leer, für $n = 3$ enthalten beide Mengen genau einen Punkt. Für $n = 4$ und $n = 5$ können alle Möglichkeiten, die Ungleichungen $\forall i \neq j \in \{1, \ldots, n\} \colon 0 \leq x_{ij} \leq 1$ mit Gleichheit zu erfüllen, ausprobiert werden. Dabei werden nur ganzzahlige Ecken erhalten. Alternativ kann auch eine Charakterisierung aller Ecken des FP2MP benutzt werden: In einer solchen bilden die Kanten, die einen nichtganzzahligen x-Wert haben, knotendisjunkte ungerade Kreise (ohne Beweis, siehe **Groetschel˙polychar**), was ebenfalls direkt impliziert, dass das FP2MP(n), $n \leq 5$ nur ganzzahlige Ecken besitzt.